Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa II - 20 martie 2021
Clasa a IX-a

Timp de lucru 180 de minute
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct

Alegeţi varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.

1. Suma $1-4+9-16+...+99^2-100^2$ este egală cu:
A -5050 **B** -4950 **C** -5000 **D** -5150 **E** -5100

2. Mulţimea valorilor reale ale lui m pentru care ecuaţia $|x-1|+|x-3|=m$ are cel puţin o soluţie reală este egală cu:
A $(0,\infty)$ **B** $[0,\infty)$ **C** $[2,\infty)$ **D** $[1;3]$ **E** $(2,\infty)$

Problemele **3-5** se referă la următorul enunţ.

În planul triunghiului ABC considerăm punctele M, N, P şi Q astfel încât: $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ şi $3\overrightarrow{QA}+2\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{0}$.

3. Dacă $x,y\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $x\overrightarrow{QM}=y\overrightarrow{QN}$, atunci valoarea raportului $\frac{x}{y}$ este:
A 3 **B** -1 **C** -2 **D** 2 **E** 1

4. Dacă $\overrightarrow{CQ}=\alpha\overrightarrow{QP}$ atunci α este egal cu:
A 4 **B** 9 **C** 5 **D** 6 **E** 8

5. Dacă $AQ\cap BC=\{R\}$, valoarea raportului $\frac{QA}{QR}$ este:
A $\frac{4}{3}$ **B** $\frac{5}{4}$ **C** $\frac{4}{5}$ **D** $\frac{3}{4}$ **E** 1

6. Cel mai mic element al mulţimii $\{ab \mid a,b\in\mathbb{R} \text{ şi } a^2+2b^2=1\}$ este egal cu:
A 0 **B** -1 **C** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ **D** $-\frac{1}{2}$ **E** $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

7. Dacă $[a]$ şi $\{a\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului real a, atunci numărul elementelor mulţimii $\left\{x\in\mathbb{R}\middle|\left[\frac{x+1}{5}\right]=\left\{\frac{x-1}{2}\right\}\right\}$ este egal cu:
A 2 **B** 1 **C** 3 **D** 0 **E** 4

8. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ascuţitunghic ABC şi punctele M, N, P în planul triunghiului astfel încât $\overrightarrow{OM}=2\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{ON}=2\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OP}=2\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}$. Dacă punctul Q este centrul de greutate al triunghiului MNP, atunci:
A $AQ||BC$ **B** $AQ\perp BC$ **C** $BQ=|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|$ **D** $AQ\perp AB$ **E** $MN\geq AB+AC$

9. Valoarea minimă a expresiei $|x+1|+|x+2|+\cdots+|x+2021|$, când x parcurge mulţimea numerelor reale, este egală cu:
A 0 **B** $2021\cdot1011$ **C** $1010\cdot1011$ **D** 1011^2 **E** 1010^2

10. Împărţim un pătrat prin paralele la laturi în 100 de pătrate congruente. Care este numărul pătratelor de diferite dimensiuni care apar în figura obţinută?
A 385 **B** 1000 **C** 200 **D** 220 **E** *alt răspuns*

11. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat, P mijlocul laturii (BC) şi punctele $M \in (AP), N \in (CE)$ astfel încât $\frac{AM}{AP} = \frac{CN}{CE} = r$. Dacă punctele B, M, N sunt coliniare, atunci r este egal cu:

A $\frac{1}{\sqrt{5}}$ **B** $\frac{2}{5}$ **C** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **D** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **E** $\frac{1}{3}$

12. Dacă $[a]$ şi $\{a\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului real a, atunci mulţimea $\left\{ \left[\frac{3}{2x}\right] \mid x \in \mathbb{R} \text{ şi } \frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}} = 2x \right\}$ este egală cu:

A $\{0,1,2\}$ **B** $\{0\}$ **C** $\{1,2\}$ **D** $\{0,1,2,3\}$ **E** $\{0,1\}$.

13. Fie M multimea tripletelor (a,b,c) de numere reale nenule cu proprietatea că a,b,c sunt în progresie aritmetică, ab, bc, ca sunt în progresie geometrică iar $a+b+c = ab+bc+ca$. Atunci $\sum_{(a,b,c)\in M} (|a|+|b|+|c|)$ este:

A $\frac{3}{2}$ **B** $\frac{5}{2}$ **C** $\frac{7}{2}$ **D** $\frac{11}{2}$ **E** $\frac{13}{2}$

14. Produsul dintre cel mai mic şi cel mai mare element al mulţimii $\left\{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} | x \in \mathbb{R}\right\}$ este egal cu:

A 3 **B** $\frac{7}{3}$ **C** $\frac{1}{3}$ **D** 1 **E** $\frac{10}{3}$

15. Considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_1 = 2; a_2 = 6$ şi $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, pentru orice $n \geq 2$. Atunci a_{2021} este egal cu:

A 2 **B** 6 **C** $\frac{1}{2}$ **D** $\frac{1}{3}$ **E** $\frac{1}{6}$

16. Pentru câte numere întregi k are loc inegalitatea $a^4+b^4+c^4+d^4+kabcd \geq 0$, pentru orice numere reale a,b,c,d?

A 1 **B** 2 **C** 5 **D** 9 **E** *alt răspuns*

17. Dacă şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, este definit prin $a_0 = 2021$ şi $a_{n+1} = 2a_n + 1$ pentru orice număr natural n, atunci:

A $47 \mid a_{48}$ **B** $47 \mid a_{47}$ **C** $47 \mid a_{46}$ **D** $43 \mid a_{43}$ **E** $43 \mid a_{44}$

18. Se consideră funcţia $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ care satisface condiţiile $f(1) = 1$; $f(2n) = 2f(n)$ şi $f(2n+1) = 4f(n)$, pentru orice număr natural nenul n. Pentru câte valori ale lui n este îndeplinită condiţia $f(n) = 16$?

A 3 **B** 4 **C** 5 **D** 6 **E** 7

19. Suma soluţiilor reale ale ecuaţiei $2^{[x]} = x + \{x\}$, unde $[x]$ şi $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului real x, este egală cu:

A 0 **B** 1 **C** $1,5$ **D** $1,75$ **E** 2

20. Dacă numerele reale x,y,z,t îndeplinesc condiţiile $(x-3y+6z-t)^2 \geq 2021$ şi $x^2+y^2+z^2+t^2 \leq 43$, atunci $|x+y+z+t|$ este un număr din intervalul:

A $(0,1)$ **B** $(1,2)$ **C** $(2,3)$ **D** $(3,4)$ **E** $(4,5)$

21. Două dintre medianele unui triunghi au lungimile 2 şi 3. Dacă aria triunghiului este egală cu 4, care este lungimea celei de-a treia mediane?

A $2\sqrt{2}$ **B** $\sqrt{13}$ **C** $2\sqrt{3}$ **D** $\sqrt{10}$ **E** $3\sqrt{2}$

22. Suma elementelor mulţimii

$$\{n \in \mathbb{N}^* \mid \text{există } a,b,c \in \mathbb{N}^* \mid \text{ cu } n = a+b+c \text{ şi } n^2 = a^3+b^3+c^3\}$$

este egală cu:

A 23 **B** 15 **C** 14 **D** 19 **E** 16

23. Cardinalul mulţimii $M = \left\{n \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{\frac{4n-2}{n+5}} \in \mathbb{Q}\right\}$ este egal cu:

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** *alt răspuns*

24. Din punctul M exterior cercului $\mathcal{C}(O,r)$ ducem tangentele MA şi MB la cerc, unde $A, B \in \mathcal{C}(O,r)$. Paralelele prin A şi B la MB, respectiv MA, intersectează cercul a doua oară în C, respectiv D, iar dreptele MC şi MD intersectează cercul a doua oară în E, respectiv F. Fie $\{Q\} = BF \bigcap MA$ şi $\{P\} = AE \bigcap MB$. Dacă $x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC} + z \cdot \overrightarrow{AQ} + t \cdot \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{0}$, unde $x, y, z, t \in \mathbb{R}^*$, atunci:

A $2x + z = 1$ **B** $x + z = 0$ **C** $\dfrac{z-t}{y} = \dfrac{AC}{MP}$ **D** $\dfrac{z+t}{y} = \dfrac{AC}{PB}$ **E** $\dfrac{z-t}{y} = \dfrac{4AC}{MB}$