Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa II - 20 martie 2021
Clasa a VII-a

Timp de lucru 120 de minute
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct

Alegeţi varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.

1. Valoarea sumei $|\pi - \sqrt{10}| + |\pi + \sqrt{10}|$ este egală cu:

A $2\sqrt{10}$ **B** 0 **C** 2π **D** π **E** $\pi - 10$

R: A

2. Soluţia ecuaţiei $\frac{x+2}{1011} + \frac{x}{1010} + \frac{x-2}{1009} + \frac{x-4}{1008} + \ldots + \frac{x-2016}{2} = 2020$ este egală cu:

A 2021 **B** 2020 **C** 2019 **D** 2022 **E** 1011

R: B

3. Partea întreagă a numărului $a = \sqrt{2} - 3\sqrt{3}$ este egală cu:

A -6 **B** -5 **C** -4 **D** -3 **E** -2

R: C

4. Dacă $a = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2021$, atunci rădăcina pătrată a lui a este egală cu:

A 2021 **B** 2020 **C** 1010 **D** 1011 **E** 1012

R: D

5. Doi biciclişti pornesc, în acelaşi moment, din două oraşe A şi B, situate la o distanţă de 165 de km unul de celălalt. Un biciclist merge din A spre B cu viteza constantă de 30 de km pe oră, iar celălalt biciclist merge din B spre A cu viteza constantă de 25 de km pe oră. Distanţa dintre cei doi biciclişti, cu 12 minute înainte de a se întâlni, este egală cu:

A 12 km **B** 9 km **C** 11 km **D** 10 km **E** 13 km

R: C

6. Laturile AB, BC, CD, DA ale unui patrulater convex au mijloacele M, N, P, respectiv R. Atunci :

A MP şi NR au acelaşi mijloc **B** $MP \perp NR$ **C** $MP = NR$ **D** $MP \perp AB$ **E** $MP \parallel BC$

R: A

7. Un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare are lungimea liniei mijlocii egală cu a. Aria trapezului este egală cu:

A $a^2\sqrt{2}$ **B** $2a^2$ **C** a^2 **D** $\frac{a^2}{4}$ **E** $a^2\sqrt{5}$

R: C

8. Fie triunghiul ABC cu $\angle BAC = 60^\circ$ şi $AI = 4$ cm, unde I este centrul cercului înscris în triunghi. Distanţa de la I la dreapta BC este egală cu:

A 4 cm **B** 2 cm **C** $\sqrt{2}$ cm **D** $4\sqrt{2}$ cm **E** $\sqrt{5}$ cm

R: B

9. Considerăm mulţimea $A = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}^*, a + b = 2021\right\}$. Numărul fracţiilor din A, ireductibile şi supraunitare, este egal cu:

A 1923 **B** 2020 **C** 1932 **D** 1011 **E** 966

R: E

10. Numărul perechilor de numere naturale nenule (a, b), prime între ele, cu proprietatea că $\frac{13a - 12b}{a + b}$ este un număr întreg, este egal cu:

A 20 **B** 24 **C** 28 **D** 22 **E** 26

R: B

11. Cel mai mic număr real $x > 0$, pentru care $x \cdot (3\sqrt{5} - 4\sqrt{3})$ este număr întreg, este egal cu:

A $\frac{4}{3}\sqrt{3} + \sqrt{5}$ **B** $3\sqrt{5} + 4\sqrt{3}$ **C** $-3\sqrt{5} + 4\sqrt{3}$ **D** $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ **E** $\sqrt{5} - \sqrt{3}$

R: A

12. Se consideră expresia $E = \left[\{x\} + \{2x\} + \{3x\}\right]$, unde x este un număr real ($\{a\}$ şi $[a]$ reprezintă partea fracţionară, respectiv partea întreagă a numărului real a). Mulţimea valorilor posibile ale lui E este egală cu:

A $\{0, 2\}$ **B** $\{0, 1\}$ **C** $\{1, 2\}$ **D** $\{0, 1, 2\}$ **E** $\{0, 1, 2, 3\}$

R: D

13. Într-un triunghi oarecare ABC considerăm punctele $D \in (AB)$ şi $E \in (AC)$, astfel încât $3AD = 2AB$ şi $DE \parallel BC$. Dacă M este mijlocul lui (AC), F este simetricul punctului E faţa de M, iar $\{Q\} = BM \cap DE$, atunci punctul Q este:

A centrul cercului înscris în $\triangle ABC$ **B** centrul cercului circumscris $\triangle ABC$
C centrul cercului înscris în $\triangle BEF$ **D** centrul de greutate al $\triangle DCF$
E centrul de greutate al $\triangle BEF$

R: E

14. Fie ABC un triunghi oarecare şi $D \in (BC)$ piciorul bisectoarei din A. Atunci:

A $AD < \sqrt{AB \cdot AC}$ **B** $AD = \frac{AB + AC}{2}$ **C** $AD = \frac{AB^2}{2 \cdot AC} + \frac{AC^2}{2 \cdot AB}$
D $AD = \sqrt{\frac{AB^2 + AC^2}{2}}$ **E** $AD^2 = AB \cdot AC$

R: A

15+16. Considerăm pătratul $ABCD$ şi punctele E pe (BC) şi F pe (CD), astfel încât triunghiul AEF să fie echilateral. Notăm cu M, N, P mijloacele segmentelor (AE), (CE), şi respectiv (DF). Atunci:

A $\angle AEB = 70^\circ$ **B** $FE \parallel PM$ **C** $FE = MN$ **D** $FE \perp MN$ **E** $PM \perp AE$

A $PM = AF$ **B** $PN = NB$ **C** $PM = PN$ **D** $FE = AB$ **E** $FN = AE$

R1: D R2: C

17. Numărul soluţiilor în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ale ecuaţiei $x^2 \cdot (y - 1) + y^2 \cdot (x - 1) = 1$ este:

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

R: E

18. Cel mai mare număr natural n, pentru care există $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$, numere naturale distincte, astfel încât suma oricăror trei dintre ele să fie divizibilă cu 15, este:

A 66 **B** 67 **C** 68 **D** 111 **E** 200

R: B

19. Numerele reale nenule a, b, c satisfac relaţiile $a < b < c$, $a \cdot b \cdot c = 1$ şi $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Atunci:

A $a + b > 2$ **B** $a + c < 2$ **C** $\frac{1}{2} < b < 2$ **D** $c < 2$ **E** $a + c = 2b$

R: C

20. Fie a, b, c, d patru numere raţionale. Definim numerele $x = |a - b||c - d|$, $y = |a - c||b - d|$, $z = |a - d||b - c|$. Atunci produsul $(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y)$ este egal cu:

A $(a+b-c-d)^6$ **B** $(a-b+c-d)^6$ **C** $(a+d-b-c)^6$ **D** 0
E $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$

R: D

21+22. Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC cu $AB < AC$, O centrul cercului său circumscris, H ortocentrul său şi înălţimile AE, BF şi CG ($E \in BC$, $F \in AC$, $G \in AB$). Fie I mijlocul lui AH şi J mijlocul lui BC. Presupunem că $IE = FJ$. Atunci:

A $FJ = BG$ **B** $CH = AB$ **C** $EF = BG$ **D** $FE \parallel AB$ **E** $IJ = BG$

A $\angle AOB = 120°$ **B** $\angle AOC = 120°$ **C** $\angle ACG = \angle OCB$ **D** $\angle ACG = \angle HCB$ **E** $\angle COB = 120°$

R1: **B** **R2: C**

23. Triunghiul ABC are vârfurile A şi B fixe, iar vârful C se deplasează astfel încât mediana AM, $M \in BC$, să aibă lungimea de 1 cm. Fie $\mathcal{P}$ mulţimea poziţiilor posibile ale lui C. Atunci $\mathcal{P}$ este inclusă:

A într-o dreaptă $d \parallel AB$ **B** într-un romb **C** într-o dreaptă $d \perp AB$
D în reuniunea a două segmente **E** într-un cerc

R: E

24. În triunghiul ABC se consideră bisectoarea AE, $E \in BC$ şi mijlocul D al segmentului AB. Dreptele CD şi AE se intersectează în F. Se ştie că $BC = 3CE$ şi $AB = 4FC$. Dacă $\angle CAB = x \cdot \angle ABC$, $x \in \mathbb{R}$, atunci:

A $x = 1$ **B** $x = \dfrac{4}{3}$ **C** $x = \dfrac{3}{2}$ **D** $x = 2$ **E** $x = 5$

R: D